10.04.14
Qu2

Qualitätssicherung (statistische)

betrifft Merkmale, wie Zuverlässigkeit, Funktionalität, Vertrauenswürdigkeit von Schätz- & Testangaben

$R(t) := P\{\overset{\text{Lebensdauer}}{T_i} > t\}$ $(t>0)$ heißt Zuverlässigkeit

Zuverlässigkeitsrechnung

ZR	Zuverlässigkeitsschaltbild	Berechnung von R	Berechnung von H (Erneuerungsfunktion)
SP	Modellierung eines Markov-Prozesses	MP / Erneuerungs-Prozess	

↳ W-Modelle

3 ② Vertrauenswürdiges Schätzen von Parametern (wie z.B. μ) einer Zufallsvariable (z.B. normalverteilt)

1.1 Erwartungswert μ einer μ,σ-normalverteilten Zufallsvariable mit bekanntem σ:

Konfidenzintervall $\left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ zum Niveau α (z.B. 5%)

1.2 Erwartungswert μ bei unbekanntem σ: Stichproben-Varianz $V := \frac{(\bar{X}-X_1)^2 + \ldots + (\bar{X}-X_n)^2}{\underbrace{n-1}_{*}}$

$\overset{*}{=}>$ „Erwartungstreue" im Gegensatz zum Nenner n

-> Beobachtungswert v für V: $v := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2$ mit $\bar{x} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

Keine Prüfungsaufgabe zu Quantilen oder Wie Schätze ich $\sqrt{\frac{V}{n}}$ „Varianz" mit Sicherheit -> Konfidenzintervall $\left[\bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{V}{n}}}_{\text{nur ein Schätzwert -> nicht } \sigma}\right]$ mit den Quantilen der (Student -) t-Verteilung (bei unbekannter Varianz) vom Grad $n \in N$ (siehe Tabelle!)

1.3 Standardabweichung (bzw. Varianz) einer normalverteilten Zufallsvariable: $\left[\frac{\sqrt{(n-1)v}}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{\sqrt{(n-1)v}}{\chi_{n-1,\alpha/2}}\right]$

bzw. $\left[\frac{(n-1)v}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)v}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$ mit den Quantilen $\chi_{\nu,\alpha}$ der Chi-Quadrat-Verteilung vom Grad $\nu \in N$ s. Tabelle

24.04.2014 • Approximatives Konfidenzintervall für eine (Eintreffer-) W-Keit

$p \in]0,1[$ einer Binomialverteilung (mit Parametern n, p): Konfidenzintervall $[p_1, p_2]$ zum Niveau

$\alpha \in]0,1[$ bestimmt durch die quadratische Gleichung in p: $\boxed{\left(n + z^2_{\alpha/2}\right)p^2 - \left(2k + z^2_{\alpha/2}\right)p + \frac{k^2}{n} = 0}$ ↳ evtl. Mitternachtsformel

mit k ($\approx n p$) als Beobachtungswert der Gesamttrefferanzahl

Prüfung — Zahlenbeispiel: $\alpha = 5\%$ => $z_{\alpha/2} \approx 1{,}96$ (aus Tabelle ablesen) => $z^2_{\alpha/2} \approx 3{,}84$; $n = 100$ Schüsse ; $k := 60$ Treffer

-> Gleichung: $103{,}84p^2 - 123{,}84p + 36 = 0$ -> $p_{1/2}$ => $[p_1, p_2] \approx [0{,}50, 0{,}69]$ (50%, 69%)

• Approximatives Konfidenzintervall für eine Zufallsrate λ

λ einer Poisson-Verteilung bei großem Stichprobenumfang n: Konf. intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$ zum Niveau $\alpha \in]0,1[$

bestimmt durch die quadratische Gleichung in λ: $\boxed{\lambda^2 - \left(2\hat{\lambda} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{n}\right)\lambda + \hat{\lambda}^2 = 0}$ mit $\hat{\lambda}$ als beobachteter

Mittelwert $\hat{\lambda}$ ($\approx \lambda$) ← geschätzter Wert für λ (was will man haben)

Zahlenbeispiel (siehe Aufgabe 2.3.2): Innerhalb von 24 Monaten werden 103 Ereignisse gezählt. (Annahme: Poisson-Verteil.)

Gesucht: Konf. intervall für die zugehörige Zufallsrate pro Monat. (Lösung: Hier mit $n = 24$ als

Stichprobenumfang! (Do 2.3 182)

② Testen

Ausgang: 1) beobachtete Stichprobe $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ vom Umfang $n \in \mathbb{N}$
(Gegeben)

2) Hypothese H_0 über einen gewissen, unbekannten Parameter einer zu Grunde liegenden W-Verteilung

3) Fehlerwahrscheinlichkeit α erster Art, dafür dass H_0 irrtümlicherweise abgelehnt wird

Gesucht: 1) Ablehnung oder Annahme von H_0

welchen wahren Wert nehme ich denn an?

2) Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit β zweiter Art, dafür dass H_0 irrt.-weise angenommen/akzeptiert wird in Abhängigkeit des wahren (unbekannten) Parameters.

Hilfsmittel: Gütefunktion / Operationscharakteristik (= 1 - Gütefunktion)

Bsp: Testen des Parameters μ einer Normalverteilung

vorgegebenes μ_0 — α = Fehler 1. Art

$H_0: \mu = \mu_0$ (feste geg. Zahl) zum Signifikanzniveau α bei Stichprobenumfang n

Aufgabe: 1) Bestimmung eines kritischen Bereichs $K =]-\infty, \mu_1[\cup]\mu_2, +\infty[$ für Ablehnung von H_0 $(\mu_1 < \mu_0 < \mu_2)$

Lösung: $\mu_1 := \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ und $\mu_2 := \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ => Grenzen für den beobachteten Mittelwert $\bar{x}$

$\bar{x} := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ -> Aufgabeteil gelöst

Wahrscheinlichkeit P in Abhängigkeit von μ

2) Bestimmung der Gütefunktion $g(\mu) := P_\mu(\bar{X} \in K)$ mit P_μ als Normalverteilung (bzw. die zugehörige W-Funktion) zum Parameter μ (als Variable bei festem bekanntem σ als Standardabweichung)

Gütefunktion

Lösung: $\boxed{g(\mu) := 2 - \Phi(z_{\alpha/2} - d(\mu)) - \Phi(z_{\alpha/2} + d(\mu))}$ mit $\boxed{d(\mu) := \frac{(\mu - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}}$

Zusammenhang mit $\beta = \beta(\mu)$: $\beta(\mu) = 1 - g(\mu)$

Zahlenbeispiel: (für diesen "zweiseitigen Gaußtest" von $H_0: \mu = \mu_0$)

$\bar{x} := 47{,}9$ (mittlere Flughöhe X) von $n := 30$ Leuchtraketen
und $\sigma = 6$ (m)

zu 95% sicher sein, wenn wir ablehnen

Hersteller sagt $H_0: \mu = 50$ (m); Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha := 5\%$ für die Ablehnung

Aufgabe: 1) Bestimmung von K bzw. vom Annahmebereich $J := \mathbb{R} \setminus K$ $(= [\mu_1, \mu_2])$

$z_{\alpha/2}(5\% = \alpha) = 1{,}96$ => $\mu_1 = 50 - 1{,}96 \frac{6}{\sqrt{30}} \approx 47{,}85$ -> $\mu_1 < \mu_0$ -> (μ_2 irrelevant)

Testergebnis: H_0 wird akzeptiert

08.05.2014

Aufgabe 2.3.1 $\alpha := 5\% \Rightarrow z_{\alpha/2} \approx 1{,}96$

Anteil p ($\in [0,1[$) von Klopfern ($k = 65$) $\Rightarrow (n + z_{\alpha/2}^2)\, p^2 - (2k + z_{\alpha/2}^2)\, p + \frac{k^2}{n} = 0 \Rightarrow p_1 \approx 45\%,\ p_2 \approx 63\%$

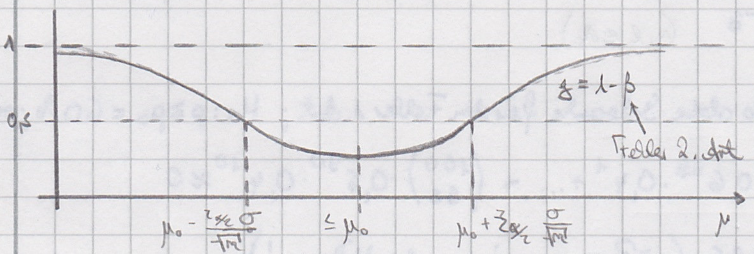
Aufgabe 2.3.2 zu schätzen: Intensität; λ von gewissen Ereignissen pro Monat; Beobachtungswert $\hat{\lambda} := \frac{103}{\underbrace{24}_{:= n}}$ (pro Monat)

Konfidenzintervall: $\alpha = 5\% \Rightarrow z_{\alpha/2} \approx 1{,}96 \Rightarrow \lambda^2 - \left(2\hat{\lambda} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)\lambda + \hat{\lambda}^2 = 0 = \lambda^2\left(-2\,\frac{103}{24} + \frac{1{,}96^2}{24}\right)\lambda + \left(\frac{103}{24}\right)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 \approx 3{,}5\ ;\ \lambda_2 \approx 5{,}1$

Eigenschaften der Gütefunktion g des zweiseitigen Gaußtests: • g (beliebig oft) differenzierbar

- Minimumstelle und senkrechte Symmetrieachse bei $\mu = \mu_0$
- $g(\mu_0) = \alpha;\ g\left(\mu_0 \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}5$
- Wendepunkte außerhalb von $\left[\mu_0 \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$



Einseitiger Gaußtest $H_0: \mu \geq \mu_0$ (bzw. $H_0: \mu \leq \mu_0$)

$z_\alpha \to$ einseitiger Gaußtest

Kritischer Bereich für die standardisierte Testgröße $\boxed{(\bar{x} - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}$: $]-\infty, -z_\alpha[$ (bzw. $]z_\alpha, \infty[$)

Gütefunktion $\boxed{g(\mu) := 1 - \Phi(z_\alpha + d(\mu))}$ für $\mu < \mu_0$ (bzw. $1 - \Phi(z_\alpha - d(\mu))$ für $\mu > \mu_0$) sonst konstant α

$\boxed{d(\mu) := \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}}$ wie beim zweiseitigen Gaußtest

letztes Zahlenbeispiel: $H_0: \mu \geq \mu_0 := 50$; bei einem Umfang von $n := 30$ ($\sigma := 6$)

kritischer Bereich

Mit $\alpha := 5\%$ ergibt sich der Ablehnungsbereich (wegen $z_\alpha \approx 1{,}64$) $]-\infty, -1{,}64[=: K$ für

$(\bar{x} - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = (47{,}9 - 50) \cdot \frac{\sqrt{30}}{6} \approx -1{,}92 \in K$

Testergebnis: H_0 wird abgelehnt (mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\leq 5\%$)

Für $\mu := 47{,}5$ (fiktiv) ergibt sich die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art $\beta(\mu) = 1 - g(\mu) = \Phi(z_\alpha + d(\mu))$

$= \Phi\left(1{,}64 + (47{,}5 - 50) \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}\right) \approx \Phi(-0{,}64) \approx 26\%$

Also bei diesem Stichprobenumfang würden wir mit 26% Wahrscheinlichkeit irrtümlich H_0 annehmen, wenn der wahre Wert $\mu = 47{,}5$ wäre

Interessante Fragestellung: Wie groß muss der Stichprobenumfang gewählt werden, dass bei einem tatsächlichen Mittelwert von $\mu := 45$ zu höchstens 10% irrtümlich akzeptiert wird?

Antwort (mittels Umformung der Bedingung $\beta(\mu) \leq \overbrace{10\%}^{\beta_{max}}$ nach n): $\boxed{n \geq \left(\frac{(z_\alpha + z_{\beta max})\,\sigma}{\mu - \mu_0}\right)^2}$

Bsp.: $n \geq \left(\frac{(1{,}64 + 1{,}28) \cdot 6}{45 - 50}\right)^2 \approx 12{,}3 \Rightarrow \underline{n \geq 13}$

für $\mu = 47{,}5 \Rightarrow \underline{n \geq 50}$ Stichprobenumfang

Prüfung = Gaußtest

Eine entsprechende Formel gilt für den zweiseitigen Gaußtest: mit $z_{\alpha/2}$ anstelle von z_α

$$\boxed{n \geq \left(\frac{(z_{\alpha/2}+z_{\beta max})\,\sigma}{\mu-\mu_0}\right)^2}$$

mit Ablehnungskriterium: $\boxed{\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| > z_{\alpha/2}}$

für 2 seitigen Gaußtest

Analog für den t-Test (bei unbekanntem σ): $\boxed{|\ldots| > t_{n-1,\alpha/2}}$

Der Binomialtest ebenfalls ein- und zweiseitig

$H_0: p \geq p_0$ (bzw. $p \leq p_0$) und $H_0\, p = p_0$

Testgröße: $x_1 + \ldots + x_n$ („Trefferzahl") mit $x_i \in \{0,1\}$

bestimmt durch

Kritischer Bereich für $H_0: p \geq p_0$: $K := \{0, 1, \ldots, k\}$ für $k \in \mathbb{N}_0 \mid g_{n,k+1}(p_0) \geq 1 - \alpha_{max}\}$ mit

↳ da ~~...~~ einseitig

$$g_{n,\ell}(p) := \sum_{j=\ell}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad (n, \ell \in \mathbb{N}_0)$$

Zahlenbeispiel: $\alpha_{max} := 13\%$ als obere Schranke für den Fehler 1. Art; $H_0: p \geq p_0 = 60\%$; $n := 100$

$$\binom{100}{100}\cdot 0{,}6^{100}\cdot 0{,}4^{0} + \binom{100}{99} 0{,}6^{99}\cdot 0{,}4^{1} + \ldots + \binom{100}{90}\cdot 0{,}6^{90}\cdot 0{,}4^{10} \approx 0$$

Bedingung $\sum \ldots \geq 1 - \frac{13\%}{2} = 0{,}935$ (-> Programmierung oder Näherung!)

welcher Parameter p

15.05.2014 • Gütefunktion des einseitigen Binomialtests von $H_0: p \geq p_0 = 60\%$: $g(p) = 1 - g_{n,k+1}(p)$ für $p \leq p_0$ (und $g(p) := g(p_0)$ für $p > p_0$) und mit $k := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid g_{n,k+1}(p_0) \geq 1 - \alpha_{max}\}$

10

Gütefunktion des zweiseitigen Binomialtests von $H_0: p \geq p_0$ $(:= 60\%)$ · $g(p)$

$$\boxed{g(p) := 1 + g_{n,\ell}(p) - g_{n,k+1}(p) = 1 - \sum_{j=k+1}^{\ell-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}}$$

mit den kritischen Grenzen (k) $\boxed{\begin{aligned} k &:= \max\left\{k \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; g_{n,k+1}(p_0) \geq 1 - \frac{\alpha_{max}}{2}\right\} \\ \ell &:= \min\left\{\ell \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; g_{n,\ell}(p_0) \leq \frac{\alpha_{max}}{2}\right\}\end{aligned}}$

Zahlenbeispiel: $p_0 = 60\%$, $\alpha_{max} := 13\%$, $n := 100 \overset{(R)}{\Longrightarrow} k = 52$, $\ell = 68$

Ergebnis: Wenn das Schussergebnis in $[0,52] \cup [68,100]$ liegt, dann wird H_0 abgelehnt (mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\leq 13\%$)

- Im Fall $p := 50\%$ oder $p := 70\%$ ergibt sich eine erstaunliche Annahmewahrscheinlichkeit von

da Fehlerwahrscheinlichkeit

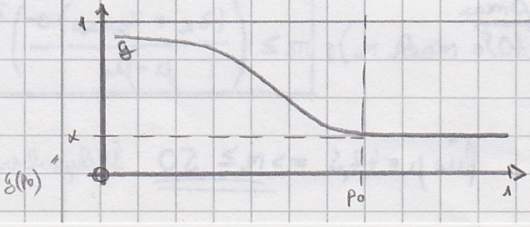
$$1 - g(p) = \cancel{1-} \sum_{j=53}^{67} \binom{100}{j} \underbrace{0{,}5^j \cdot 0{,}5^{100-j}}_{0{,}5^n = 0{,}5^{100}} = \cancel{1-} 0{,}5^{100} \sum_{j=53}^{67} \binom{100}{j} \approx 30\%$$

Fehler 2. Art von 30%

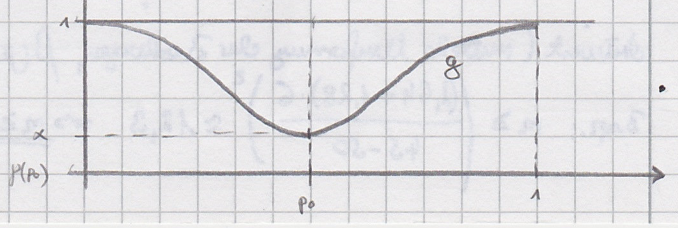
↳ nicht ganz so sicher bei Ablehnung (Fehler 1. Art)

Qualitative Skizze der Gütefunktion

1) einseitig



2) zweiseitig



15

11 QS **3.9.1 Der sequentielle LQ-Test (A. Wald)** zum Abwägen zweier Hypothesen $H_0: \vartheta = \vartheta_0$ und $H_1: \vartheta = \vartheta_1$ gegeneinander; ($\vartheta_0, \vartheta_1 \in \mathbb{R}$). Dichtefunktion p_ϑ (diskret oder stetig). Testgröße $T_n(x_1 \dots x_n)$ in Abhängigkeit für Stichprobenumfang n

$$T_n(x_1 \dots x_n) := \prod_{j=1}^{n} \frac{p_{\vartheta_1}(x_j)}{p_{\vartheta_0}(x_j)}$$ -> Entscheidung je nach Größe für H_0 ($T_n<1$) oder H_1 ($T_n>1$)

$$\boxed{\Rightarrow P_{\vartheta_0}\left\{\boxed{T_n \ge \frac{1-\beta}{\alpha}}\right\} \le \alpha \;(1) \quad ; \quad P_{\vartheta_1}\left\{\boxed{T_n \le \frac{\beta}{1-\alpha}}\right\} \le \beta \;(0)}$$

α & β vorgegeben -> n wählen Schritt für Schritt

für beliebige $\alpha, \beta \in \,]0, \tfrac12[$

Test: Man erhöht den Testumfang $n \in \mathbb{N}$ so lange bis entweder (0) (-> H_0) oder (1) (-> H_1) Entscheidung für. Die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Ablehnung von H_0 bzw. H_1 beträgt dann höchstens α bzw. β.

Bsp.: Der LQ-Binomialtest von $H_0: p = p_0 = 60\%$; $H_1: p = p_1 := 50\%$

Schusstest: $n := 50$, $m := 33$ Treffer (Ergebnis) Weil die Testgröße $T_n(x_1 \dots x_n)$ mit $x \in \{0,1\}$ nicht von der Reihenfolge der x_j abhängt, ist hier $\boxed{T_n(m) := \frac{p_1^{m}(1-p_1)^{n-m}}{p_0^{m}(1-p_0)^{n-m}}}$ (Beobachtete Trefferzahl) als Testgröße entscheidend.

In unserem Zahlenbeispiel ergibt sich $T_{50}(33) \approx 0{,}11 < \frac{1}{3} = \frac{\beta}{1-\alpha}$ (0) für $\alpha := \beta := 10\%$ selber gewählt mit 10% Fehler machen kann

da <1 für >1 $\Rightarrow \frac{1-\beta}{\alpha}$

-> H_0 wird akzeptiert ~~(=> er muss noch mehr üben)~~

Zum Vgl.: Stichprobenumfang $n := 100$ beim einseitigen Binomialtest von $H_0: p \ge p_0 := 60\%$ liefert einen Fehler 2. Art $\beta(p_1 := 50\%) \approx 24\% > \beta$

Aufgaben 3.8.1 – c) ist Schätzen (3 Kapitel) ; 3.8.2) Stichproben... Aufgaben 2 3

④ Zuverlässigkeitsrechnung (ZR)

15 **Def.**: Für die zufällige Lebensdauer X (in Zeiteinheiten) einer sog. "Betrachtungseinheit" (z.B. Bauteil, Festplatte) heißt

$R(t) := P\{X > t\} = 1 - \underbrace{P\{X \le t\}}_{\text{kumulative Verteilungsfkt. als Fkt. von t.}} \; (= 1 - F_X(t))$ die Zuverlässigkeit(sfunktion) (Reliability)

Bem.: Im ZR wird aus den Zuverlässigkeiten R_i ($i \in N_n$) einzelner Einheiten/Komponenten die (Gesamt-)Zuverlässigkeit R des Systems berechnet. Dabei ist das sog. „Zuverlässigkeitsschaltbild" (ZSB) verantwortlich dafür, wie aus den R_i das R berechnet wird.

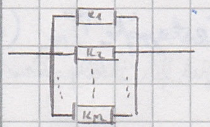
16 **Bsp.**: a) Serielles System — K_1 — K_2 — ... — K_n — ($n \in \mathbb{N}$) mit Einzel-Zuverlässigkeiten $R_1 \dots R_n$. Das (Gesamt-)System ist per Def. genau dann intakt, wenn jede einzelne Komponente K_i intakt ist.

Überlegung: zugehörige Lebensdauern X_i; unabhängige Gesamtlebensdauer X

$$P\{X > t\} = P\{X_1 > t \wedge \dots \wedge X_n > t\} \overset{\text{unabhängig}}{=} P\{X_1 > t\} \cdot P\{X_2 > t\} \cdots P\{X_n > t\}$$

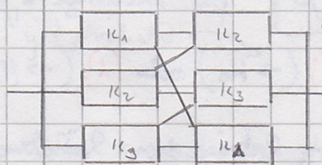
$$\Rightarrow \boxed{R = R_1 \cdot \ldots \cdot R_n}$$

22.05.2014 b) **parallele System** System intakt genau dann, wenn K_1 oder K_2 oder ... oder K_n intakt.



$\xrightarrow[\text{a)}]{\text{Vgl. mit}}$ $\boxed{1-R = (1-R_1)(1-R_2)\dots(1-R_n)}$

c) **2 von 3 System** kann nicht mit den Formeln in a) und b) behandelt werden.



$R = P(\underbrace{K_1 \wedge K_2}_{A} \vee \underbrace{(K_2 \wedge K_3)}_{B} \vee \underbrace{(K_3 \wedge K_1)}_{C})$

$P = (A \vee B \vee C) \underset{\text{Formel}}{\overset{\text{Sieb-}}{=}} P(A)+P(B)+P(C)-P(A\wedge B)-P(B\wedge C)-P(A\wedge C)$
$+P(A\wedge B\wedge C)$

$A\wedge B = B\wedge C = C\wedge A$

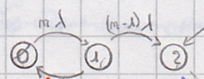
18 $\Rightarrow R = P(K_1\wedge K_2)+P(K_2\wedge K_3)+P(K_3\wedge K_1) - 3P(K_1\wedge K_2\wedge K_3) + P(K_1\wedge K_2\wedge K_3)$

unabhg. $= R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 - 2R_1R_2R_3$

Allgemein: **Zuverlässigkeit eines m-von-n Systems** (mit Reparatur)

Erläuterung am Spezialfall $m = n-1$

ZSB $\longrightarrow$ Intensitätsgraph:



$(N=3)$

SP11 Intensitätsmatrix: $B := \begin{pmatrix} -n\lambda & n\lambda & 0 \\ \mu & -\mu-(n-1)\lambda & (n-1)\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\neq$ Übergangsmatrix (P,Q) $\Rightarrow$ Intensitätsmatrix ist keine stochastische Matrix

Es gibt nur eine Grenzverteilung ($\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{p}\,B = \vec{0}$), und für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

$\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t)$ im Zustand 0, 1 bzw. 2 gilt. $\boxed{R(t) = \pi_0(t)+\pi_1(t) = 1-\pi_2(t)}$

Bem: Hier gilt $\lim_{t\to\infty} R(t) = 0$ da ② absorbierend (langfristig wird das System ausfallen)

Bestimmung von $\pi_2(t)$ bzw. $R(t)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation angewendet auf DGL

$\boxed{\dot{P} = PB}$ der Übergangsmatrix $P = P(t)$: $\pi_2(t) = \Lambda \sum_{j=0}^{N-1} \pi_j\, e^{v_j t}$ mit $\Lambda := (-1)^{N-1} v_1 \dots v_{N-1}$

$v_j < 0$ als NST des charakteristischen Polynoms von $\tilde{B} := \begin{pmatrix} -n\lambda & n\lambda \\ \mu & -\mu-(n-1)\lambda \end{pmatrix}$ $(j = 1;\ 2 = N-1)$

19 $\pi_j := \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{N-1} \frac{1}{v_j - v_k}$

Charakteristisches Polynom von $\tilde{B}$: $\begin{vmatrix} -n\lambda - x & n\lambda \\ \mu & -\mu-(n-1)\lambda - x \end{vmatrix} = x^2 + (\mu + 2n\lambda - \lambda)x + \overbrace{n(n-1)\lambda^2}^{v_1 v_2\ (*)}$

für char. Gleichung

23 NST $v_{1,2} = \frac{\lambda - \mu - 2n\lambda \pm \sqrt{\overbrace{\lambda^2 + \mu^2 + 2(2n-1)\lambda\mu}^{d = \text{Diskriminante}}}}{2} = \frac{-(2n-1)\lambda - \mu \pm \sqrt{d}}{2}$ mit d

$\Rightarrow \Lambda = n(n-1)\lambda^2$ $(*2)$

$\pi_1 = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{2} \frac{1}{v_1 - v_k} \overset{v_0=0}{=} \frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_1 - v_2}$; $\pi_2 = \prod_{\substack{k=0 \\ \text{da } k\neq 2}}^{1} \frac{1}{v_2 - v_k} = \frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{v_2 - v_1}$

Mit $v_2 < v_1 \overset{<0}{}$ ergibt sich $v_1 - v_2 = -\sqrt{d}$; $\pi_0 = \prod_{k=1}^{2} \frac{1}{-v_k} = \frac{1}{v_1 v_2} \overset{(*)\&(*2)}{=} \frac{1}{\Lambda}$

20 $\Rightarrow \pi_2(t) = \cancel{\frac{\Lambda}{d}} \cancel{v_1 - v_2} \;\; \frac{\overbrace{1 - n(n-1)\lambda^2}^{\Lambda}}{\sqrt{d}}\cdot\left(\frac{-1}{v_2} e^{v_2 t} - \frac{1}{v_1} e^{v_1 t}\right)$

$\Rightarrow R(t) = \frac{\overset{=v_1 v_2}{n(n-1)\lambda^2}}{\sqrt{d}}\left(\frac{1}{v_2}e^{v_2 t} - \frac{1}{v_1}e^{v_1 t}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{d}}\left(v_1 e^{v_2 t} - v_2 e^{v_1 t}\right)}$ Zuverlässigkeit von einem $(n-1)$-von-n Reparatursystem mit absorbierendem Systemausfall

22.05.2014

22 <u>Zahlenbeispiel</u>: $n=3$ Reparaturrate $\mu := 5$ (pro Monat), Ausfallrate $\lambda := 1$ (pro Monat) eines einzelnen Komponent

(mit Einzelzuverlässigkeit $R_i(t) := e^{-\lambda t}$ für $i = 1,2,3$)

$$\Rightarrow R(t) = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1^2 + 2\cdot 5\cdot 1\cdot 5 + 5^2}_{=\lambda^2+2(2n-1)\lambda\mu+\mu^2 \quad d=76}}} \cdot \left(\frac{-5\cdot 1 - 5 - \sqrt{76}}{2} \cdot e^{(-10\sqrt{76})t/2} - \frac{10+\sqrt{76}}{2} e^{(-10-\sqrt{76})t/2} \right)$$

$$\text{für } t \text{ (pro Monat)} \Rightarrow R(6) = \frac{1}{\sqrt{76}} \left(\frac{-10-\sqrt{76}}{2} e^{3(-10+\sqrt{76})} - \frac{-10+\sqrt{76}}{2} e^{3\cdot(-10-\sqrt{76})} \right)$$

$R(t) = 0{,}023$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das dieses System nach 6 Monaten noch intakt ist.

05.06.2014 <u>Def.</u>: $A(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ausgehend von einem definierten Startzustand das System zur Zeit $t \geq 0$ intakt ist. Die Fkt. <u>A heißt Verfügbarkeit</u>

<u>Bem.</u>: a) Für ein Reparatur-System mit <u>absorbierenden</u> Systemausfall gilt $\boxed{A = R}$

b) Im Allgemeinen gilt in einem Reparatursystem $\boxed{A = 1 - \pi_N}$ mit $\pi_N = \pi_N(t)$ als Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Zustand N des Systemausfall

$\rightarrow$ 1 - da Gegenereignis zu nicht Intakt

$\rightarrow$! Start bei 3 nicht 1 !

c) Um R für ein Reparatur-System mit absorbierenden Systemausfall zu bestimmen, kann nach a) und b) die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N) = \pi_0 \cdot P$ mit Startverteilung $\vec{\pi}_0 := (1,0,\dots,0)$ und $P = P(t)$ als Übergangsmatrix

Übergangsmatrix

alle Komponenten intakt

<u>Def.</u>: Die Fkt. $\lambda(t) := -\frac{R'(t)}{R(t)}$ (mit R als Zuverlässigkeit) heißt <u>Ausfallrate</u>.

<u>Bem.</u>: a) Die Ausfallrate ist genau dann <u>konstant</u>, wenn $R(t) = e^{-\lambda t}$ ($\rightarrow$ Exponentialverteilung!) gilt.

$$\Rightarrow -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{+\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

3.43. im WS-Skript b) Bei Erlang-Verteilung der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ gilt $R(t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$ also $R'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + e^{-\lambda t} \cdot \lambda \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$

$$\Rightarrow R'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right)$$

$$\boxed{R'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}}$$

17
$$\Rightarrow \boxed{\lambda(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}}}$$

Spezialfall $k = 1 \rightarrow \lambda(t) = \lambda$ (Exponentialverteilung)

c) Für kleine $\Delta t > 0$ ist $\lambda(t) \cdot \Delta t$ ungefähr die W.keit für den Ausfall (des Systems) im Zeitintervall $[t, \Delta t + t]$

<u>Bsp.</u>: Ausfallrate $\lambda = \lambda(t)$ eines 2-von-3-Systems ohne Reparatur mit <u>konstanter</u> Ausfallrate $\lambda > 0$ für die einzelnen Komponenten.

23 <u>Allg. Formel</u> für $(n-1)$ von n -Systems (Reparatur) aus 4.5.2: $\lambda(t) = n\cdot(n-1)\lambda^2 \cdot \frac{e^{v_1 t} - e^{v_2 t}}{v_1 e^{v_2 t} - v_2 e^{v_2 t}}$

mit $v_{1,2} := \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\lambda^2 + 2(2n-1)\lambda\mu + \mu^2} - (2n-1)\lambda - \mu \right)$

bei uns $\mu = 0$ und $n = 3$ $\Rightarrow v_{1,2} = \frac{1}{2}(\pm\lambda - 5\lambda)$ $\Rightarrow$ $v_1 = -2\lambda$ & $v_2 = -3\lambda$

$$\Rightarrow \lambda(t) = 6\lambda^2 \frac{e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t}}{-2\lambda e^{-2\lambda t} + 3\lambda e^{-3\lambda t}} = 6\lambda^2 \frac{e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t}}{3\lambda e^{-2\lambda t} - 2\lambda e^{-3\lambda t}} > 0$$

$$= 6\lambda \frac{1 - e^{-\lambda t}}{3 - 2e^{-\lambda t}}$$ also $\lambda(0) = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Ausfallrate 0

→ verschwindende Ausfallrate am Anfang!

Zeit bis zum Ausfall des absorbierenden Systems

Dichtefkt

23 Zusammenhang zwischen MTFF und MTBF: $MTFF = \int_0^\infty t(f(t))\,dt$ ist die mittlere

Lebenserwartung (z.B. eines Systems mit absorbierenden Systemausfalls)

$(n-1)$ von n Reparatursystem mit nicht-absorbierenden Systemausfall

MTBF := mittlerer Ausfallabstand d.h. die Zeit zwischen Reparatur am Systemausfall

bis zum nächsten Systemausfall (also unabhängig von μ') $\Rightarrow$ $\boxed{MTBF = MTFF - \frac{1}{n\lambda}}$